DESCRIPCIÓN BREVE

Tratamos de averiguar dónde colocar el menor número de cámaras de seguridad de modo que quede cubierto todo el patio de nuestro centro.

Pablo Azpiazu González.
Alba Escudero Revuelta.
Cristina García Ríos.
Miguel Gómez Rey.
Alejandro López López.
Sonia López Revuelta.
Joana Oria Conde.
Roberto Ortiz Martínez.
Pablo Pardo García.
Cristina Rivero Sainz.
Sonia Ruíz Santos.
Mark Schmuckle Rico.
Profesor: Mª del Pilar Sabariego Arenas.

Índice.

1. Introducción y antecedentes.

El problema de la galería de arte o problema del museo es un problema de visibilidad muy estudiado en la geometría computacional. Trata de dar respuesta a la pregunta:

¿Cuál es el menor número de cámaras de seguridad necesarias para vigilar un museo?

El primero en plantear este problema fue Victor Klee. Lo hizo en 1973 y en los siguientes términos:

Determinar el mínimo número de puntos de un polígono que son suficientes para ver a todos los restantes.

En la versión computacional del problema la galería de arte o el museo se representa con un polígono simple y cada guardia (inmóvil), cámara de seguridad o foco de luz (si lo que queremos es iluminarlo) se representa con un punto en el polígono.

La motivación de este problema viene dada en la propia pregunta ya que las galerías de arte y los museos tienen que vigilar las valiosas colecciones de artistas famosos que albergan, intentando que el coste de dicha vigilancia sea el menor posible. Es por esto que los museos vigilan las colecciones con guardas estáticos o videocámaras, intentando que el número de ellos sea lo más pequeño posible, pero de manera que cada parte del museo o la galería pueda ser visible por al menos un guarda o una videocámara. Ambos se consideran fijos en un sitio, aunque cubren cualquier dirección (es decir, giran 360º).

Victor Klee le propuso este problema a su amigo Václav Chvátal, quien lo resolvió en 1975. Sin embargo, la demostración que se considera más elegante y sencilla es la que dio Steve Fisk, en 1978.

Al lugar desde donde se puede observar la galería completa, se le denomina núcleo de la galería.

Si el polígono que representa a la galería o al museo tiene hasta cinco vértices basta con tener una única cámara. (Ver Fig. 1.)

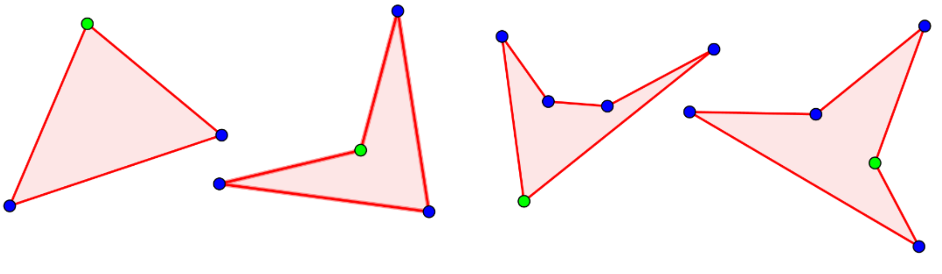

Figura 1. Polígonos de hasta cinco lados y situación de la única cámara desde donde vigilarlos.

Evidentemente, si el polígono es convexo, da igual el número de vértices que tenga, también basta con una única cámara. (Ver Fig 2.)

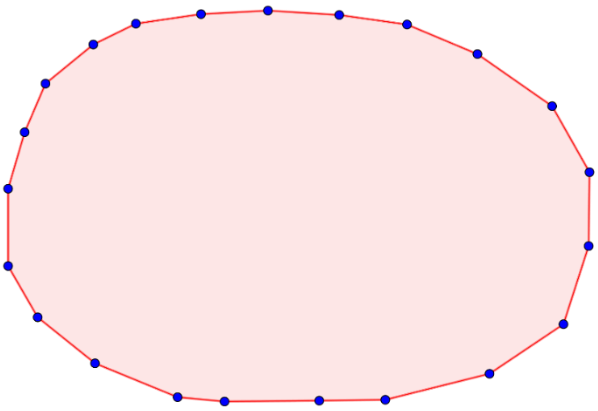

Figura 2. En un polígono convexo sólo necesitamos una cámara que vigilarlo completamente.

¿Qué ocurre con un polígono que tenga seis vértices? En esta situación son suficientes dos cámaras. Puede que con una única cámara baste, por ejemplo si se trata de un hexágono convexo, pero existen situaciones en las que son necesarias dos cámaras. (Ver Fig. 3.)

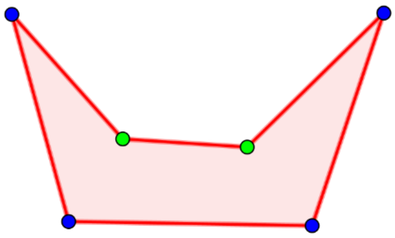

Figura 3. En un polígono de seis lados son suficientes dos cámaras.

La solución a la que llegó Chvátal es que dado un polígono simple (en el que las aristas no se cortan entre sí) con n vértices, el número suficiente de cámaras para vigilarlo siempre será $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, donde $\lfloor \quad \rfloor$, simboliza la parte entera del número, es decir el menor entero más cercano a $\frac{n}{3}$. Es decir, si tenemos un polígono simple con 17 vértices, necesitaremos $\left\lfloor \frac{17}{3} \right\rfloor = 5$ cámaras para vigilarlo completamente. (Ver Fig. 4)

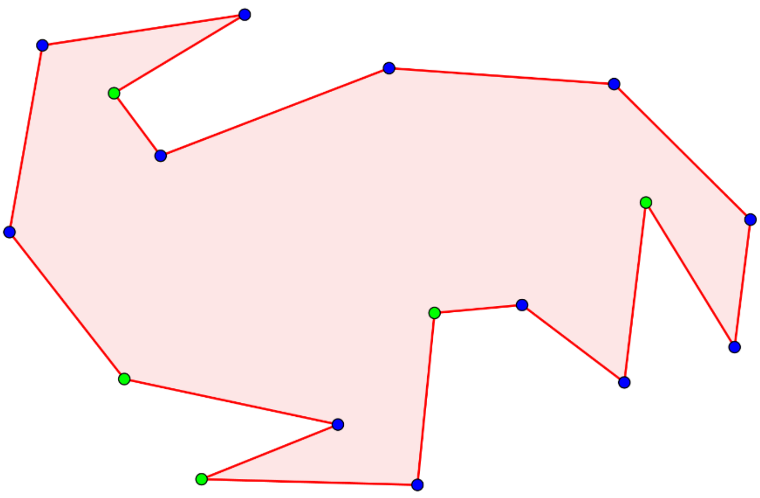

Figura 4. Polígono de 17 vértices donde son necesarias 5 cámaras para vigilarlo completamente.

Utilicemos el ejemplo anterior para ver cómo Fisk demostró que son necesarias 5 cámaras para vigilar un polígono de 17 vértices.

Lo primero es triangular el polígono. Para ello basta con añadir diagonales entre los vértices, sin que se cruce ninguna. (Ver Fig. 5)

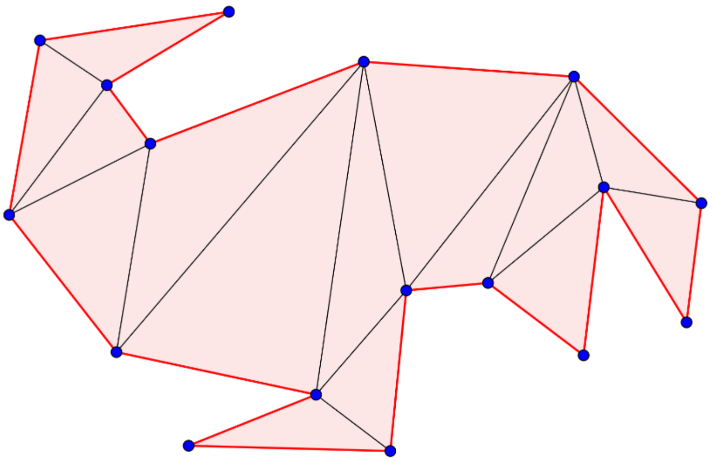

Figura 5. Triangulación de un polígono de 17 vértices.

En segundo lugar, coloreemos la triangulación de modo que no haya dos vértices del mismo color en un triángulo. (Ver Fig. 6.)

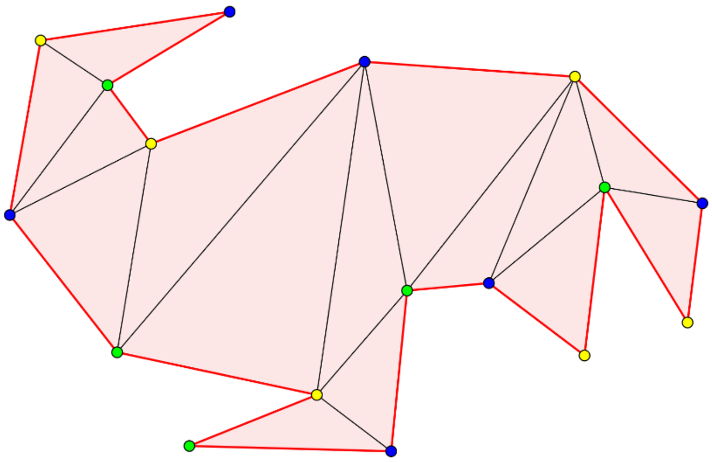

Figura 6. Coloración de la triangulación de un polígono de 17 vértices.

Por último, contemos el número de vértices de cada color y elijamos el que aparece menos veces. En este caso, la solución viene dada por los vértices de color verde. Es decir, las 5 cámaras han de colocarse en los vértices que están coloreados en verde. La justificación del resultado se basa en que desde cada vértice de un triángulo podemos vigilar el triángulo completo. Si cada triángulo tiene un vértice coloreado en verde, todos los triángulos estarán vigilados y, por tanto, todo el polígono.

¿Qué ocurre cuando dentro del polígono hay obstáculos o huecos? Es decir, volviendo al ejemplo de la galería de arte cuando nos encontramos alguna pared, muro o columna que impide la visibilidad. (Ver Fig. 7.)

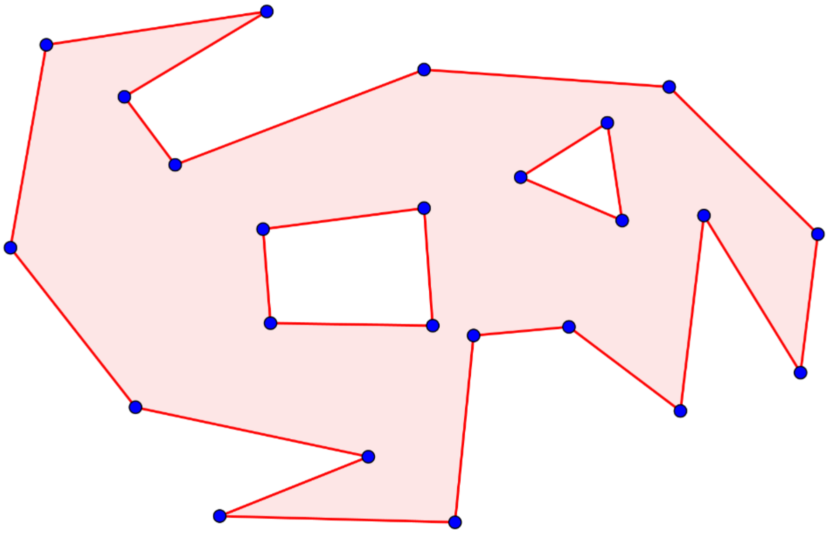

Figura 7. Polígono de 17 vértices y dos huecos.

En la tesis para obtener el título de Licenciado en Matemáticas de Carolina Rivera Arredondo encontramos la respuesta. El resultado se debe a Bhorling-Sachs, Souvaine, Hoffman, Kaufman y Kriegel y dice que para vigilar cualquier polígono con n vértices y h huecos son siempre suficientes y a veces necesarios $\left\lfloor \frac{n+h}{3} \right\rfloor$ videocámaras.

El método para conseguir saber dónde colocar las videocámaras consiste en "abrir unos pasillos" entre los edificios y el exterior de manera que consigamos un polígono cóncavo que deje los edificios fuera (ver Fig. 8). Una vez hecho eso, aplicaremos el mismo mecanismo que en el caso del polígono sin huecos, explicado antes.

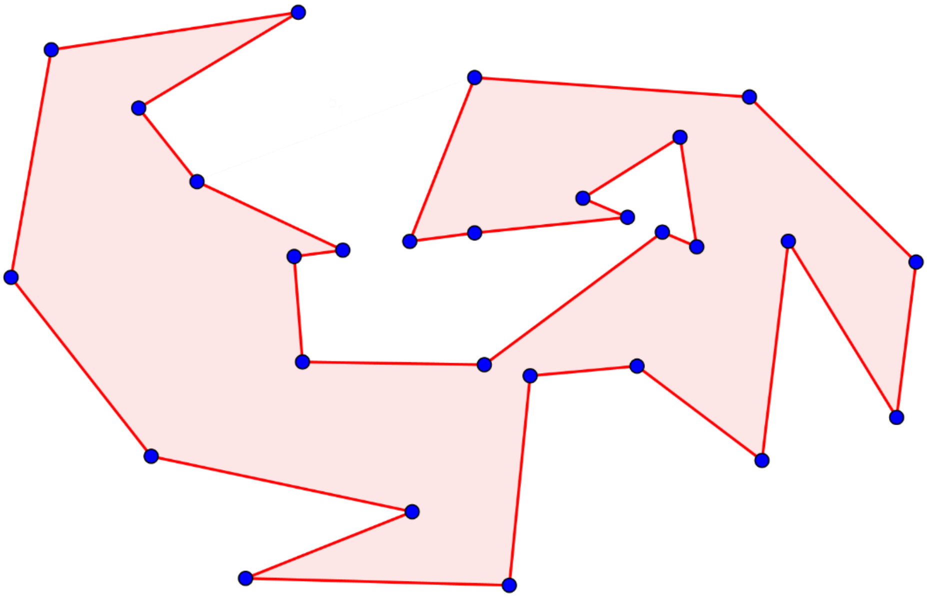

Figura 8. Polígono de 17 vértices y dos huecos con los "pasillos abiertos".

2. Descripción del problema y herramientas necesarias.

Nuestro problema consiste en saber dónde debemos colocar las videocámaras para vigilar todo el patio de nuestro instituto y del colegio vecino con el que lo compartimos. Para ello, en primer lugar, debemos conseguir una imagen aérea de nuestro centro. Usaremos **Iberpix**. Iberpix es una aplicación web del Instituto Geográfico Nacional, que proporciona ortofotos y cartografía del territorio nacional. (Ver Fig 9.)

Figura 9. Fotografía aérea del patio de nuestro instituto.

Esta fotografía la introducimos en Geogebra para poder construir sobre ella el polígono que circunscribe a nuestro centro. (Ver Fig. 10.)

Figura 10. Fotografía aérea del patio de nuestro instituto con el polígono que lo circunscribe marcado.

El polígono que enmarca a nuestro centro tiene 10 vértices. Por tanto, serán suficientes 3 vídeo cámaras para vigilarlo completamente. Veamos dónde situarlas.

Comencemos triangulando el polígono. (Fig. 11.)

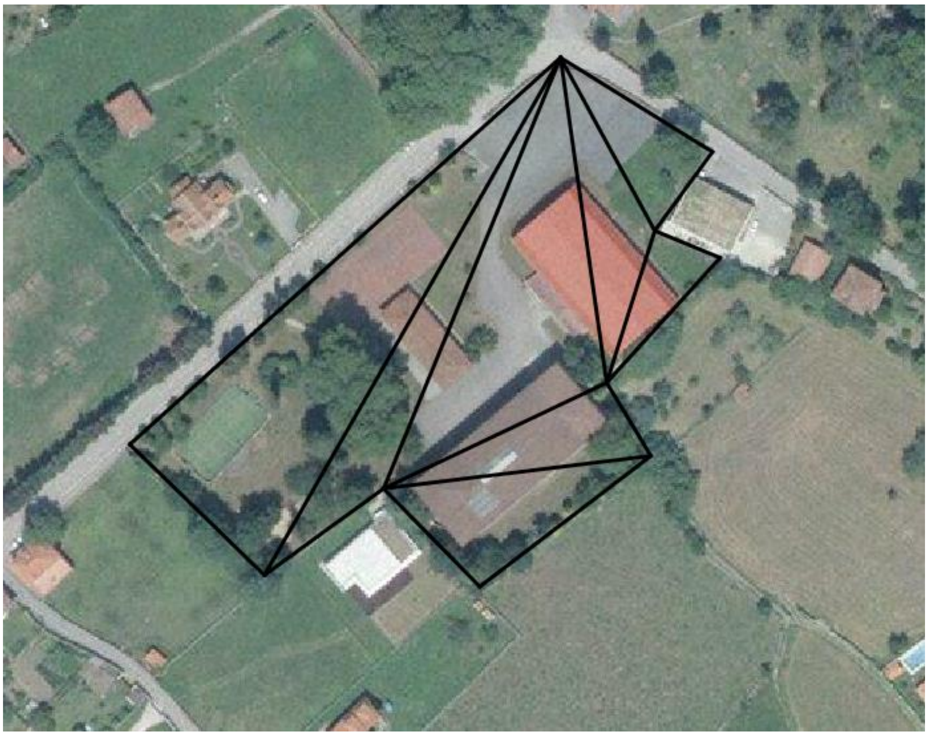

Figura 11. Triangulación del patio de nuestro instituto.

Coloreemos la triangulación. (Fig. 12.)

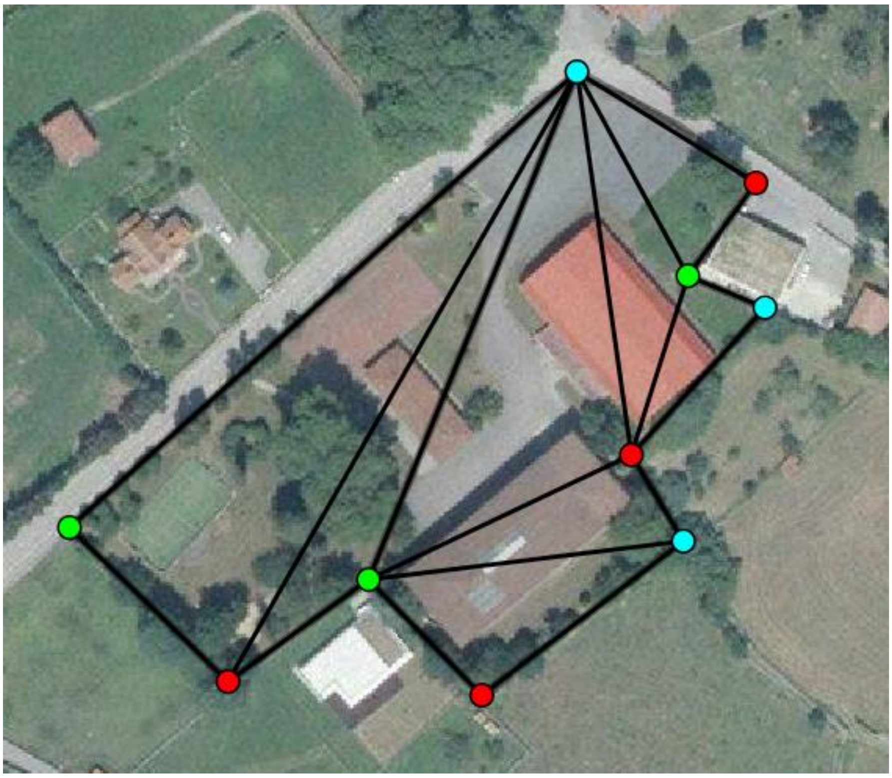

Figura 12. Coloración de la triangulación del patio de nuestro instituto.

Según la Fig. 12., las 3 videocámaras con las que vigilar el patio de nuestro instituto se deben colocar o bien en los vértices coloreados en azul, o bien en los vértices coloreados en verde.

Pero, ¿qué pasa con los edificios que hay en el patio? Están el edificio del instituto y del colegio, el gimnasio del instituto y el salón de actos del colegio. Las cámaras no pueden atravesar paredes. Hay sitios que quedarían sin vigilancia. ¿Cómo resolvemos eso? En este caso aplicamos el resultado de Bhorling-Sachs, Souvaine, Hoffman, Kaufman y Kriegel, explicado antes que nos dices que para vigilar cualquier polígono con n vértices y h huecos son siempre suficientes y a veces necesarias $\left\lfloor\frac{n+h}{3}\right\rfloor$ videocámaras.

El polígono cóncavo que deja los edificios fuera lo podemos ver la Fig. 13 y consta de 27 vértices. El número de huecos es tres (instituto y colegio, salón de actos y pabellón), por tanto, necesitaremos a lo más $\left\lfloor\frac{27+3}{3}\right\rfloor = 10$ videocámaras.


Figura 13. Polígono que deja los edificios del recinto del centro fuera.

En la Fig. 14 mostramos la triangulación del polígono que deja los edificios del recinto del centro fuera.

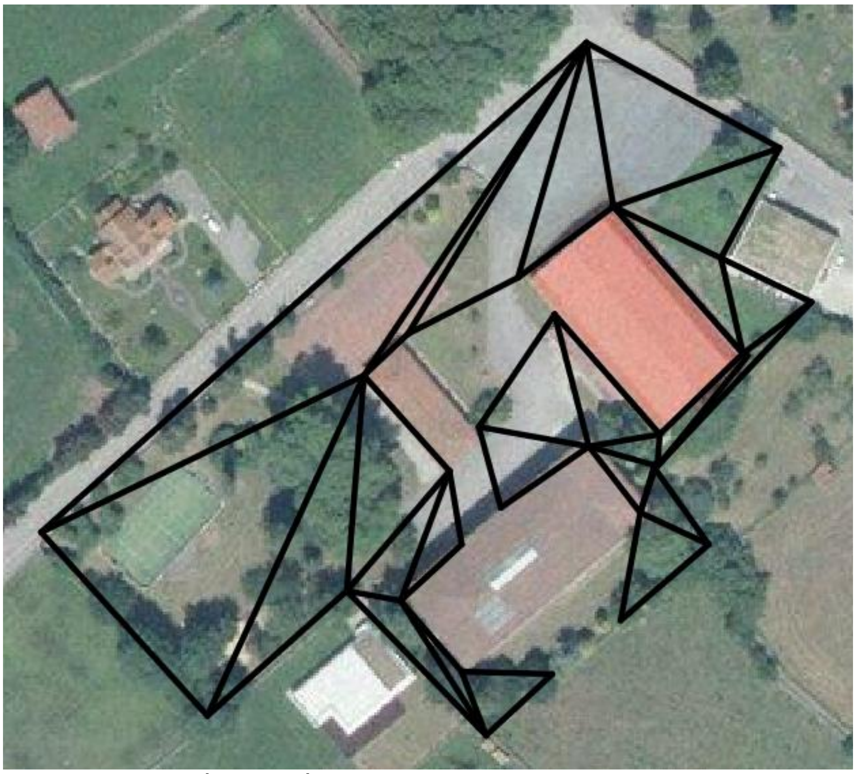

Figura 14. Triangulación del polígono que deja los edificios del recinto del centro fuera.

Por último, en la Fig. 15 mostramos la solución al problema. En este caso, son suficientes 8 videocámaras para vigilar todo el patio del centro. Una posible ubicación es la que viene señalada por los vértices verdes.

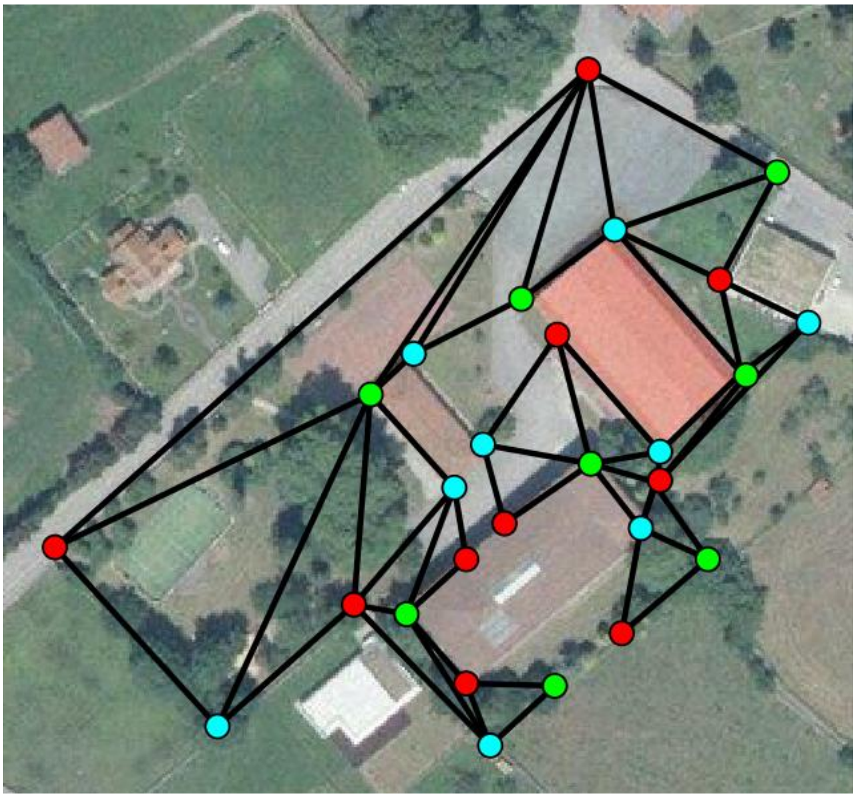

Figura 15. Coloración de la triangulación del polígono que deja los edificios del recinto del centro fuera.

3. Solución del problema.

Tenemos dos soluciones: una no real, que es cuando no tenemos en cuenta los edificios que hay en el patio del instituto y otra real que la obtenemos al considerar los edificios del patio (ver Fig 16). En ambos casos las videocámaras deben colocarse donde se encuentran los vértices coloreados en verde.

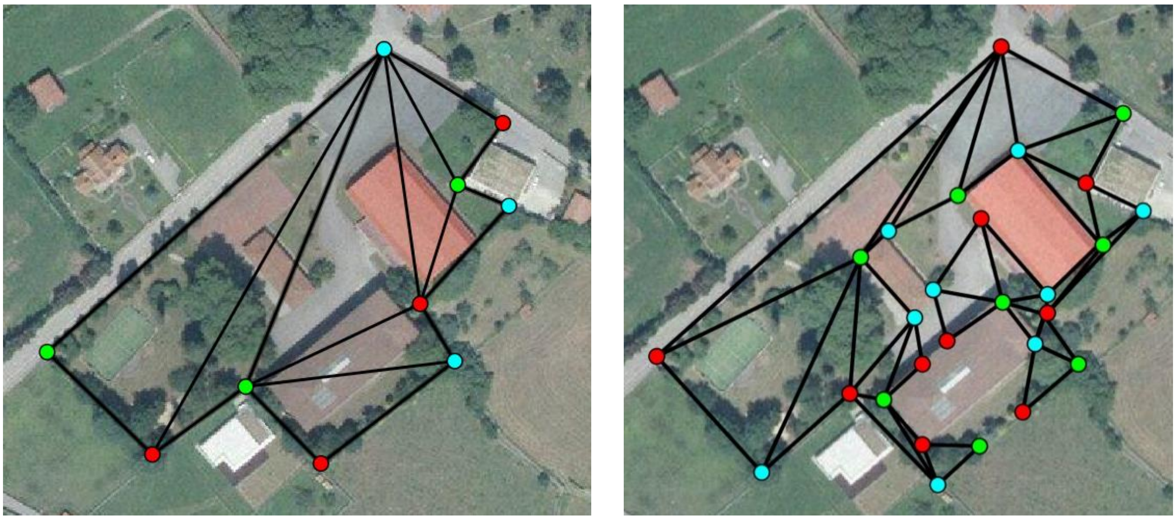

Figura 16. Soluciones no real (izquierda) y real (derecha) del problema.

Puede haber otras soluciones también válidas que sitúen las videocámaras en otros lugares. En cualquier caso, lo importante es que no sobrepase el número máximo de videocámaras que establecen los resultados de Chvátal, $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, (para polígonos sin obstáculos en su interior) y Bhorling-Sachs, Souvaine, Hoffman, Kaufman y Kriegel, $\left\lfloor \frac{n+h}{3} \right\rfloor$ (para polígonos con obstáculos en su interior), siendo n el número de vértices del polígono y h en número de obstáculos o huecos de su interior.

4. Bibliografía.

- http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/009589567890059X?np=y

- https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_la_galer%C3%ADa_de_arte

- http://culturacientifica.com/2014/01/29/teorema-de-la-galeria-de-arte/

- http://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/teorema-de-la-galeria-de-arte/

- http://mena.com.mx/gonzalo/maestria/invest/Problema_Galeria_de_Arte.pdf

- https://teoriasdegraficas.wordpress.com/2011/11/20/problema-de-la-galeria-de-arte/

- https://cuentos-cuanticos.com/author/claragrima/

- http://contenido.ign.es/iberpix2/visor/

- http://lic.mat.uson.mx/tesis/021_Carolina_Rivera_A.pdf